

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1916.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES.
Quai des Grands-Augustins, 55.
1917

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1916.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58384 55, quai des Grands-Augustins.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1916.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands Augustins, 55.

1917

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1916 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL.
	DARBOUX.
	DEMOULIN.
	DERUYTS.
	HADAMARD.
	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
	HUMBERT.
	JORDAN.
	LECORNU.
	MITTAG-LEFFLER.
	NEUBERG.
	PAINLEVÉ.
	PICARD.
	VALLÉE POUSSIN (DE LA).
	VOLTERRA.
	ZEUTHEN.

Président........................	MM. FOUCHÉ.
Vice-Présidents..................	FONTENÉ.
	GUICHARD.
	LEBESGUE.
	MAILLET.
Secrétaires......................	P. LÉVY.
	MONTEL.
Vice-Secrétaires.................	FATOU.
	TRESSE.
Archiviste.......................	CAHEN.
Trésorier........................	SERVANT.
Membres du Conseil (2)..........	BIOCHE, 1917.
	BLUTEL, 1919.
	BOREL, 1917.
	BOULANGER, 1919.
	BRICARD, 1918.
	CARTAN, 1919.
	DRACH, 1917.
	FOURET, 1917.
	GRÉVY, 1918.
	GUICHARD, 1917.
	KOENIGS, 1918.
	VESSIOT, 1918.
	OCAGNE (D'), 1918.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

En raison de l'état de guerre actuel, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé de suspendre les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous :

Date de l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17ᵉ).

1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5ᵉ).

1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.

1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6ᵉ).

1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7ᵉ).

1910. **ARCHIBALD** (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).

1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.

1896. **BAKER**, professeur à l'Universite de Toronto (Canada).

1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5ᵉ).

1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P. (¹).

1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17ᵉ). S. P.

1910. **BERTRAND** (G.), rue de la Vieille-Église, 2, à Versailles.

1913. **BILIMOVITCH**, privat-dozent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6ᵉ).

1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6ᵉ). S. P.

1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14ᵉ).

1902. **BOBERIL** (comte Roger DU), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.

1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.

1892. **BONAPARTE** (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16ᵉ).

1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5ᵉ). S. P.

1913. **BORTOLOTTI** (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne, (Italie).

1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).

1896. **BOULANGER**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5ᵉ).

1913. **BOULIGAND**, agrégé de mathématiques, docteur ès sciences, 9, rue de la Scellerie, à Tours (Indre-et-Loire).

1896. **BOURGET** (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18ᵉ).

(¹) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1904. BOUTROUX (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. BREITLING, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14e).
1911. BRATU, professeur, stradela Goliei, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. BRICARD, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).
1873. BROCARD, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. BROWNE, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1901. BUHL, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. CAHEN, chargé de cours à la Sorbonne, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1893. CALDARERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme (Italie).
1885. CARON, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17e).
1896. CARTAN, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15e).
1887. CARVALLO, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5e). S. P.
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1911. CHALORY, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6e).
1896. CHARVE, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.
1911. CHATELET, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1907. CHAZY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1913. COBLYN, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16e).
1915. CONSTANTINIDÈS, professeur au gymnase de Rhodos (Grèce).
1896. COSSERAT (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1900. COTTON (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1914. CRELIER, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
1904. CURTISS, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6e).
1885. DAUTHEVILLE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. DELASSUS, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. DELVILLE (L.), ingénieur aux forges et aciéries de Huta-Bankowa, à Dombrowa (Pologne, Russie).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. DENJOY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. DICKSTEIN, Marszatkowska, 117, à Varsovie.

Date
de
l'admission.

1914. DONDER (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1899. DRACH, chargé de cours à la Faculté des Sciences, square Lagarde, 3, à Paris (5e).
1909. DRURY, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. DULAC, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. DUMAS (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Liberty Street, 55, New-York City.
1902. EGOROFF (Dimitry), professeur à l'Universite, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. ESCLANGON, astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1912. EISENHARDT (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. ELCUS, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8e). S. P.
1903. ESPANET, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. ETZEL, professeur de mathématiques et d'astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. FARAGGI, professeur, galerie Sarlande, 1, à Alger.
1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14e).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. FLOQUET, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).
1903. FORD (WALTER B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).
1905. FOUËT, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).
1872. FOURET, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.
1903. FRAISSÉ, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. FRÉCHET, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. FUETER, ancien président de la Société mathématique suisse, ancien professeur à l'Université de Bâle, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9^{III}, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. GALBRUN, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7e).
1900. GALDEANO (Z.-G. DE), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. GARGAM DE MONCETZ, licencié ès sciences, à Étoile (Drôme).
1872. GARIEL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).

Date
de
l'admission.

1908. **GARNIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1911. **GAU**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1913. **GIRAUD**, agrégé de mathématiques, rue Le Verrier, 11, à Paris (6e).
1913. **GODEAUX**, rue Victor-Cousin, 6, à Paris.
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).
1914. **GOLOUBEFF** (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1907. **GOT** (Th.), docteur ès sciences, section technique du génie, rue de Bellechasse, 39, à Paris (7e).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 *bis*, à Paris (5e). S. P.
1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris (8e).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16e).
1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17e). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17e).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).
1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5e).
1914. **JAGER** (F.), licencié ès sciences, avenue de la Grande-Armée, 69, à Paris (16e).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).

Date de l'admission.

1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7e). S. P.
1913. KASNER (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1910. KÉRAVAL, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14e).
1913. KIVELIOVITCH, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5e).
1892. KOCH (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KŒNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14e).
1913. KOSTITZIN (V.), avenue Villemin, 32, à Paris.
1907. KRYLOFF, ingénieur des Mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).
1897. LACAUCHIE, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17e).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. LALESCO, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).
1896. LAROZE, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14e).
1908. LATTÈS, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 24, à Toulouse.
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14e).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17e). S. P.
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11e).
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. LECORNU, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. LEMOYNE (T.), rue Claude-Bernard, 41, à Paris (5e).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. LE ROY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6e).
1891. LERY, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6e).
1909. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6e).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16e).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1886. LIOUVILLE, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7e).
1913. LUSIN, professeur adjoint à l'Université de Moscou, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1895. MAILLET, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.

Date de l'admission.

1905. MALUSKI, proviseur du lycée de Marseille.
1906. MARCUS, licencié ès sciences, rue Berthier, 6, à Nemours (Seine-et-Marne).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).
1884. MARTIN (Artemas), 918 N. Street, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7e). S. P.
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14e).
1893. MICHEL (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. MONTEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15e).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 3[1], à Copenhague (Danemark).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).
1882. OCAGNE (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.
1905. OLIVET, 49, rue d'Arras, à Douai.
1873. OVIDIO (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).
1912. PANGE (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e).
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1914. PÉRÈS, agrégé de l'Université, professeur au lycée de Montpellier.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue de la Convention, 116, à Paris (15e).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Pétersbourg.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. PFEIFFER, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

Date
de
l'admission.

1906. PHILIPPE (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).
1913. PODTIAGUINE (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. POTRON (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).
1914. POWALO-SCHWEIKOWSKI, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 *bis*, à Paris (14e).
1902. PUX (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).
1903. RÉMOUNDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).
1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. RICHARD D'ABONCOURT (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).
1903. ROCHE, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).
1896. ROUGIER, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. ROUSIERS, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e).
1911. RUDNICKI, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14e).
1900. SALTYKOW, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1897. SCHOU (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1901. SEE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7e).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg. S. P.
1900. SERVANT, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. SHAW (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. SIRE, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.
1916. SOULA, agrégé de l'Université, 40e d'infanterie, S. P. 130.
1900. SPARRE (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. SPEISER (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. STECKER (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1879. STEPHANOS, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).

Date
de
l'admission.

1898. STÖRMER, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. SUDRIA, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14e).
1904. SUNDMAN, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1913. TAMARKINE, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1899. THYBAUT, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5e).
1910. TIMOCHENKO, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. TINO (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1912. TOUCHARD, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8e).
1910. TRAYNARD, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).
1907. TRIPIER (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).
1911. TURRIÈRE, docteur ès sciences, professeur au lycée de Montpellier.
1913. VALIRON, docteur ès sciences, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).
1893. VALLÉE POUSSIN (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université de Louvain (Belgique), avenue Dorian, 2, à Paris (11e).
1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macau, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1913. VEBLEN (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, avenue du Petit-Chambord, 44, à Bourg-la-Reine (Seine).
1911. VILLAT, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).
1880. WALCKENAER, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).
1879. WEILL, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16e).
1906. WILSON (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. WINTER, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16e).
1909. WOODS (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16e).
1912. YOUNG (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Rodlinde, Épinettes, 22, à Lausanne (Suisse).

Date de l'admission.

1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'Artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).

1903. ZERVOS, professeur agrégé à l'Université, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).

1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).

1898. ZIWET, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1909. ZORETTI, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1915 : MM. AUTONNE, BERGER, GUYOU, HALPHEN.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET. CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.

1873 CHASLES.
1874 LAFON DE LADÉBAT.
1875 BIENAYMÉ.
1876 DE LA GOURNERIE.
1877 MANNHEIM.
1878 DARBOUX.
1879 O. BONNET.
1880 JORDAN.
1881 LAGUERRE.
1882 HALPHEN.
1883 BOUCHÉ.
1884 PICARD.
1885 APPELL.
1886 POINCARÉ.
1887 FOURET.
1888 LAISANT.
1889 ANDRÉ (D.).
1890 HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891 COLLIGNON.
1892 VICAIRE.
1893 HUMBERT.
1894 PICQUET.

MM.

1895 GOURSAT.
1896 KŒNIGS.
1897 PICARD.
1898 LECORNU.
1899 GUYOU.
1900 POINCARÉ.
1901 D'OCAGNE.
1902 RAFFY.
1903 PAINLEVÉ.
1904 CARVALLO.
1905 BOREL.
1906 HADAMARD.
1907 BLUTEL.
1908 PERRIN (R.).
1909 BIOCHE.
1910 BRICARD.
1911 LÉVY (L.).
1912 ANDOYER.
1913 COSSERAT (F.).
1914 VESSIOT.
1915 CARTAN.
1916 FOUCHÉ.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.......	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.......	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle............	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore........	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin...........	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin...........	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin...........	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne..........	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.........	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles........	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles........	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta..........	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.......	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.........	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague......	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague......	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie..........	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft............	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.......	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.......	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand............	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen........	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax..........	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse (Canada)
Hambourg........	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem..........	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.......	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas..........	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan...........	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.........	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.........	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig..........	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig..........	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig..........	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége............	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.........	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres..........	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres..........	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Casopis pro péstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis.
Rennes	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Rome	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Archiv for Mathematik.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram)	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

Charles HALPHEN.

Charles Halphen, le regretté vice-secrétaire de la Société mathématique, était né le 3 septembre 1885; entré à l'École Centrale l'un des premiers, en 1903, il fut, à sa sortie, attaché comme ingénieur à la Compagnie P.-L.-M. où il participa à la construction du chemin de fer de Moutiers à Bourg-Saint-Maurice; mais ses goûts le portaient vers la science pure; il avait, d'ailleurs, de qui tenir, étant fils de Georges Halphen, le grand géomètre, qui fut membre de l'Institut et présida, en 1882, la Société mathématique.

Nommé professeur de Géométrie descriptive au collège Chaptal en 1912, Charles Halphen, par son enseignement original et très goûté des élèves, promettait de devenir un professeur éminent; quelques Notes élégantes parues dans les *Nouvelles Annales* et dans le *Bulletin de la Société mathématique* présageaient un géomètre de talent.

Sous-lieutenant de réserve d'artillerie, la mobilisation le surprit en Islande où il faisait une seconde exploration dans une des régions les plus sauvages et les moins connues de l'île, car il aimait le danger et l'aventure; ardent patriote, il se rendit à son poste de combat par les voies les plus rapides, sans prendre le temps d'aller embrasser sa mère pendant une halte de quelques heures à Paris; toujours en première ligne, il fit vaillamment son devoir et tomba glorieusement le 15 mai 1915 à Neuville-Saint-Vaast.

Cité à l'ordre du jour de l'armée, voici en quels termes le commandant du régiment signala sa fin héroïque :

« Le lieutenant-colonel a la douleur de porter à la connaissance du régiment la mort du lieutenant Charles Halphen, tué, le 15 mai, au combat de Neuville-Saint-Vaast. Il dirigeait, depuis le début de notre offensive, l'action des canons de tranchées. Il a porté à l'ennemi de rudes coups. D'une incomparable bravoure, il avait communiqué à ses hommes l'ardeur qui l'animait; il faisait l'admiration de tous : chefs, subordonnés et camarades garderont de lui le souvenir d'un noble caractère et son exemple ne sera pas perdu. »

WEILL.

Jean CLAIRIN.

Jean Clairin, né à Nîmes le 13 novembre 1876, entra en 1896 à l'École Normale. Reçu le premier à l'agrégation de Mathématiques en 1899, docteur ès sciences en 1902, il débuta dans l'Université comme professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon. En 1903, il était maître de conférences, en 1907, professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Le premier travail de Clairin, qui lui a servi de Thèse de Doctorat, est relatif à un sujet encore tout récent à ce moment-là, et dont l'importance avait surtout été mise en lumière dans les *Leçons sur la Géométrie* de Darboux. L'étude des surfaces à courbure constante, et de certaines transformations de ces surfaces, avait conduit à définir certaines correspondances entre deux éléments de contact de l'espace qui, lorsque des conditions d'une forme particulière sont réalisées, font correspondre les intégrales de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. On avait surtout jusque-là étudié quelques cas particuliers intéressants. Prenant cette question à un point de vue plus général, Clairin a montré que ces transformations se classent naturellement en trois grandes catégories, classification rationnelle qui est aujourd'hui adoptée, et étudié tout particulièrement les transformations B_1, qui offrent la plus grande analogie avec la célèbre transformation de Laplace. L'étude de ces diverses transformations soulève un grand nombre de questions qui touchent à plusieurs points de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Les travaux de Clairin ont porté sur bien des points de ce vaste domaine et ont pour but : soit de développer ses premières recherches, soit de compléter des résultats déjà démontrés par d'autres. Je dois citer en particulier une Note, qui avait vivement attiré l'attention de Darboux, sur l'impossibilité de trouver de nouveaux cas d'intégrabilité de l'équation $s=f(x, y, z)$, question que Sophus Lie avait déjà abordée sans la résoudre complètement. Tous les écrits de Clairin ont un caractère d'élégance et de précision, preuve du soin qu'il mettait à la rédaction, ne négligeant aucun détail; c'était aussi, m'a-t-on dit, la marque de son enseignement.

On était en droit d'attendre encore beaucoup de lui, et ses dernières Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* faisaient prévoir toute une suite d'importants résultats.

A la mobilisation, Clairin fut incorporé comme adjudant à la 11e compagnie du 24e territorial. Le 26 août 1914, ce régiment rencontra à Thun-l'Évêque des forces ennemies considérables et Clairin disparut. Une année d'angoisses, d'espoirs sans cesse renaissants et toujours déçus commença alors pour les siens. La certitude est venue : dès le début de la bataille, Jean Clairin avait été tué d'une balle au front. La guerre a détruit en lui une belle intelligence, une conscience droite, un cœur excellent.

Ed. Goursat.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 12 JANVIER 1916.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Communication :

M. Fontené : *Sur une extension des polygones de Poncelet.*

M. Darboux a retrouvé récemment (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1916) la chaîne de $2n$ coniques que l'auteur a fait connaître en 1897 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XVI) pour l'extension de la théorie des polygones de Poncelet, chacun des sommets du polygone décrivant une conique distincte, en même temps que chacun des côtés roule sur une conique distincte. La méthode suivie par l'auteur, outre qu'elle est élémentaire, a l'avantage d'étudier en elle-même une chaîne intéressante de $2n$ coniques, à laquelle on applique ensuite *la condition unique de fermeture.* Dans l'exposé succinct qui suit, l'auteur établit d'une manière complète l'existence de la chaîne de coniques indépendamment de la condition de fermeture; une difficulté subsiste, relativement à la possibilité de réaliser cette condition : l'auteur indique seulement comment il lui paraissait possible de résoudre cette difficulté.

La solution de M. Darboux, fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques, est assurément rigoureuse. Mais elle ne permet pas d'organiser d'abord la chaîne de coniques indépendamment de la condition de fermeture, pour introduire ensuite cette condition; elle exprime les éléments du problème, condition de fermeture comprise, en fonction de $2n+1$ constantes qui doivent satisfaire à trois conditions (on dispose d'ailleurs de deux paramètres supplémentaires, auxquels on a donné pour simplifier la valeur 1).

La méthode employée ici donne les deux cas de fermeture du triangle, qui ne se sont pas offerts dans l'analyse de M. Darboux.

1. Dans une correspondance doublement quadratique $f(x, y) = 0$, il existe quatre valeurs de x donnant pour y deux valeurs égales : je les appelle *valeurs critiques* de x; il existe de même quatre valeurs critiques de y; ces deux systèmes de valeurs critiques sont équi-anharmoniques. La relation $f = 0$, qui dépend de huit paramètres, est déterminée par ses éléments critiques et par une dernière donnée.

Théorème. — *Deux correspondances doublement quadratiques*

$$f_{12}(x, y) = 0, \qquad f_{23}(y, z) = 0$$

donnent entre x et z une correspondance qui se décompose en deux correspondances doublement quadratiques

$$f'_{13}(x, z) = 0, \qquad f''_{13}(x, z) = 0,$$

si les quatre valeurs critiques de la variable commune y sont les mêmes dans les deux correspondances données. Les valeurs de x ou de z qui étaient primitivement critiques pour y sont encore les valeurs critiques de ces variables dans chacune des deux correspondances résultantes.

Il suffit d'écrire

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \qquad A'z^2 + 2B'z + C' = 0,$$

A, B, ... étant des polynomes du second degré en y; l'hypothèse permet d'écrire

$$AC - B^2 = A'C' - B'^2 = \Delta,$$

et l'on a

$$(Ax + B)^2 + \Delta = 0, \qquad (A'z + B')^2 + \Delta = 0;$$

on en déduit, par une même valeur de y,

$$Ax + B \pm (A'z + B') = 0,$$

et l'on achève facilement. Si l'on prend par exemple la relation $f' = 0$, une valeur de x donne deux valeurs de y dont chacune fournit une seule valeur de z.

L'extension au cas de N variables est immédiate; on part des $N - 1$ relations doublement quadratiques

$$f_{12}(x, y) = 0, \qquad f_{23}(y, z) = 0,$$
$$f_{34}(z, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_{N-1,N}(v, w) = 0,$$

la variable commune à deux relations consécutives ayant les mêmes valeurs critiques dans ces deux relations, et la relation entre x et w se décompose en relations doublement quadratiques

$$f'_{1N}(x, w) = 0, \qquad f''_{1N}(x, w) = 0, \qquad \ldots,$$

en nombre 2^{N-2}; dans chacune de ces deux relations, les x et les w critiques sont les anciens x et les anciens w critiques.

Corollaire. — *Étant données entre* N *variables les* N *relations doublement quadratiques*

$$f_{12}(x, y) = 0, \qquad f_{23}(y, z) = 0, \qquad \ldots,$$
$$f_{N-1,N}(v, w) = 0, \qquad f_{N1}(w, x) = 0,$$

si la variable commune à deux quelconques de ces relations, y compris la dernière et la première, a les mêmes valeurs critiques dans ces deux relations, ce qui forme $4N - 1$ *conditions, il faut encore une condition et une seule pour que ces relations admettent une infinité de solutions.*

Cette condition peut être appelée *condition de fermeture.*

En effet, la relation donnée $f_{N1}(w, x) = 0$ doit être identique à l'une des relations en nombre 2^{N-2} indiquées ci-dessus; comme la relation donnée et celle avec laquelle on veut l'identifier ont les mêmes valeurs critiques, il y a une seule condition d'identification.

Si l'on se donne x, on a à choisir entre deux valeurs de y, et ce choix détermine complètement les valeurs des autres variables.

2. Les relations doublement quadratiques dont j'aurai à faire usage sont symétriques par rapport aux deux variables. Une telle relation dépend de cinq paramètres; en disposant des trois paramètres de la substitution

$$x = \frac{aX + b}{cX + d}, \qquad y = \frac{aY + b}{cY + b},$$

et en remplaçant ensuite X et Y par $\tang \frac{x}{2}$ et $\tang \frac{y}{2}$, on peut lui donner la forme canonique

$$\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \cos x \cos y + \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} \sin x \sin y = 1;$$

pour les valeurs

$$x = \varphi, \qquad -\varphi, \qquad \pi - \varphi, \qquad \pi + \varphi,$$

on obtient pour y une valeur double

$$y = \theta, \quad -\theta, \quad \pi - \theta, \quad \pi + \theta,$$

de sorte que les valeurs critiques de X et de Y sont

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \quad -\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \quad \cot\frac{\varphi}{2}, \quad -\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Théorème. — *Les deux relations*

$$\frac{\cos\theta_{12}}{\cos\varphi}\cos x \cos y + \ldots = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\cos\theta_{23}}{\cos\varphi}\cos y \cos z + \ldots = 1, \tag{2}$$

qui ont les mêmes angles critiques, donnent entre x et z une relation qui se décompose en deux relations de même forme

$$\frac{\cos\theta_{13}}{\cos\varphi}\cos x \cos z + \ldots = 1; \tag{3}$$

pour déterminer θ_{13}, on fait dans (1) *et* (2)

$$y = \varphi, \qquad x = \theta_{12}, \qquad z = \theta_{23},$$

et l'on a dans (3)

$$\frac{\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{13}}{\cos\varphi} + \ldots = 1; \tag{F}$$

cette relation donne deux valeurs pour θ_{13}.

On peut s'assurer que l'élimination de y entre (1) et (2), et l'élimination de θ_{13} entre (3) et (4) donnent le même résultat. On remarquera que les six angles x, y, z, θ_{23}, θ_{31}, θ_{12} jouent des rôles analogues, de la même façon que les sommets d'un quadrilatère complet.

L'extension au cas de N angles est immédiate.

Corollaire. — *Les* N *relations*

$$\frac{\cos\theta_{12}}{\cos\varphi}\cos x \cos y + \ldots = 1, \tag{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\cos\theta_{N1}}{\cos\varphi}\cos w \cos x + \ldots = 1, \tag{N}$$

admettent une infinité de solutions sous une condition unique de fermeture.

Cette condition est que θ_{N1} soit l'une des valeurs, en nombre 2^{N-2}, qui figurent dans le résultat de l'élimination de y, ..., v entre les $N-1$ premières relations.

3. On déduit de là ce théorème :

Soit une chaîne de $2n$ *coniques*

$$S'_1, \quad S_2, \quad S'_3, \quad S_4, \quad \ldots, \quad S_{2n},$$

conjuguées à un même triangle, chaque conique d'indice pair S *(y compris la dernière) touchant les quatre tangentes communes aux deux coniques voisines* S', *chaque conique d'indice impair* S' *(y compris la première) passant aux quatre points communs aux deux coniques voisines* S *(ce qui fait seulement* $2n-1$ *conditions) : il faut une condition pour qu'il existe un contour polygonal mobile de* n *côtés dont les sommets* A'_1, A'_3, ... *soient sur les coniques* S', *et dont les côtés* a_2, a_4, ... *soient tangents aux coniques* S.

Si l'on se donne le sommet A'_1, *on a le choix entre les deux tangentes* a_2 *que l'on peut mener de ce point à la conique* S_2, *et ce choix détermine entièrement le reste du contour.*

Tout d'abord, étant données deux coniques S et S', courbes unicursales, la correspondance algébrique établie entre une tangente a à la conique S et un point A' de la conique S' par la condition que le point A' soit sur la droite a, ou que la droite a passe par le point A', est une correspondance doublement quadratique; les positions critiques de a, celles qui donnent deux points A' confondus, sont les tangentes communes aux deux courbes, et les positions critiques de A', celles qui donnent deux droites a confondues, sont les points communs aux deux courbes. Considérons alors trois coniques S'_1, S_2, S'_3 *inscrites à un même quadrilatère :* une tangente a_2 à la conique S_2 rencontre S'_1 aux deux points $+A'_1$ et $-A'_1$ et rencontre S'_3 aux deux points $+A'_3$ et $-A'_3$; la correspondance entre A'_1 et A'_3 se décompose en deux correspondances doublement quadratiques, dont l'une associe les points de même signe, et le passage du couple $+A'_1$, $+A'_3$ au couple $-A'_1$, $+A'_3$ se fait par une tangente commune, à l'instant où, les deux points A'_1 se confondant sur S'_1, les deux points A'_3 se confondent également sur S'_3. Et l'on comprend ainsi pourquoi, dans le théorème donné au début, les valeurs critiques de la variable commune y doivent être les mêmes pour que la relation entre x et z se décompose. Pour trois coniques S_2, S'_3, S_4, *circonscrites à un même quadrangle,* on a des faits corrélatifs. La chaîne de $2n$ coniques ayant la structure indiquée, on est

bien dans les conditions du corollaire ci-dessus : les trois coniques S'_1, S_2, S'_3 étant inscrites à un même quadrilatère, les positions critiques de a_2 sont les mêmes pour A'_1 et A'_3 ; les trois coniques S_2, S'_3, S_4 étant circonscrites à un même quadrangle, les positions critiques de A'_3 sont les mêmes pour a_2 et a_4 ; et ainsi de suite.

Le triangle autopolaire commun étant donné, les $2n$ coniques, simplement conjuguées par rapport à ce triangle, dépendraient de $4n$ paramètres; *la condition de fermeture mise à part*, je dis que les $2n$ conditions apparentes auxquelles elles sont soumises se réduisent à $2n-1$, et qu'elles dépendent par suite de $2n+1$ paramètres. Les deux premières coniques S'_1 et S_2 étant simplement conjuguées par rapport au triangle, la conique S'_3 du faisceau tangentiel déterminée par ces deux coniques dépend d'un paramètre; la conique S_4 du faisceau ponctuel déterminé par S_2 et S'_3 dépend alors d'un paramètre; on continue ainsi jusqu'à la conique S_{2n-2}. On cherche alors deux coniques S'_{2n-1} et S_{2n} vérifiant les conditions suivantes : dans la suite

$$S'_{2n-3},\quad S_{2n-2},\quad S'_{2n-2},\quad S_{2n},\quad S'_1,\quad S_2,$$

où les deux coniques du milieu sont à déterminer, la conique S'_{2n-1} doit toucher les tangentes communes aux deux précédentes, la conique S_{2n} doit passer par les points communs aux deux suivantes, et, de plus, le faisceau ponctuel déterminé par S'_{2n-1} et S_{2n} doit contenir S_{2n-2}, le faisceau tangentiel déterminé par ces deux mêmes coniques doit contenir S'_1. Ces quatre conditions sont-elles compatibles, et se réduisent-elles à trois, portant ainsi le nombre des conditions à $(2n-4)+3$ ou $2n-1$? En d'autres termes, peut-on se donner encore la conique S'_{2n-1} avec un paramètre, et, cela fait, les trois conditions apparentes imposées à S_{2n} se réduisent-elles à deux conditions, et à deux conditions compatibles?

Le triangle autopolaire commun étant pris comme triangle de référence, et la condition pour que le point (x, y, z) soit sur la droite (u, v, w) étant

$$ux + vy - wz = 0,$$

soient les équations (ponctuelles ou tangentielles) des $2n$ coniques qui doivent former la chaîne demandée :

(S'_1) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - z^2 = 0,$$

(S_2) $$\frac{u^2}{a_2^2} + \frac{v^2}{b_2^2} - w^2 = 0,$$

....;

(S'_3) $$\frac{u^2}{a_\lambda^2} + \frac{v^2}{b_\lambda^2} - w^2 = 0,$$

avec $N = 2n$; on posera

$$\frac{x'_1}{z_1} = a_1 \cos\alpha_1, \qquad \frac{y'_1}{z_1} = b_1 \sin\alpha_1,$$
$$\frac{u_2}{w_2} = a_2 \cos\alpha_2, \qquad \frac{v_2}{w_2} = b_2 \sin\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les deux premières coniques étant prises à volonté dans le système des coniques conjuguées par rapport au triangle, la condition qui exprime que le point A'_1 est sur la tangente a_2 est

$$a_1 a_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + b_1 b_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = 1,$$

et l'on peut lui donner la forme

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta_{12}}{\cos\varphi} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \frac{\sin\theta_{12}}{\sin\varphi} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = 1,$$

en déterminant l'angle φ par la relation

$$(a_1 a_2)^2 \cos^2\varphi + (b_1 b_2)^2 \sin^2\varphi = 1,$$

qui assure l'existence de θ_{12} :

$$\frac{\sin\theta_{12}}{\sin\varphi} = b_1 b_2, \qquad \frac{\cos\theta_{12}}{\cos\varphi} = a_1 a_2, \qquad \frac{\operatorname{tang}\theta_{12}}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{b_1}{a_1} \times \frac{b_2}{a_2}.$$

Pour les coniques S_2 et S'_3 on aura de même

$$(2) \qquad \frac{\cos\theta_{23}}{\cos\varphi} \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \ldots = 1,$$

avec la mêmes valeurs de φ puisque les coniques S'_1, S_2, S'_3 font partie d'un même faisceau tangentiel, et l'on continuera ainsi jusqu'aux deux coniques S'_{N-3}, S_{N-2}, pour lesquelles on aura

$$(N-3) \qquad \frac{\cos\theta_{N-3,N-2}}{\cos\varphi} \cos\alpha_{N-3} \cos\alpha_{N-2} + \ldots = 1.$$

En considérant les coniques S_{N-2} et S'_{N-1}, S'_{N-1} et S_N, S_N et S'_1, on aura pour déterminer les coefficients des équations de ces coniques les trois équations :

$$(a_{N-2} a_{N-1})^2 \cos^2\varphi + (b_{N-2} b_{N-1})^2 \sin^2\varphi = 1,$$
$$(a_{N-1} a_N)^2 \quad \cos^2\varphi + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1,$$
$$(a_N a_1)^2 \quad \cos^2\varphi + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1;$$

il arrivera alors que la conique S'_1 *fera partie du faisceau ponctuel déterminé par* S_N *et* S_2, *puisque les* φ *critiques ont été maintenus le long du cycle.*

On pourra prendre à volonté a_{N-1}, calculer b_{N-1} au moyen de la première relation, et obtenir ensuite a_N et b_N, pourvu qu'on ait

$$\frac{a_{N-1}}{a_1} \neq \frac{b_{N-1}}{b_1} \quad \text{ou} \quad \frac{b_{N-1}}{a_{N-1}} \neq \frac{b_1}{a_1};$$

or la première des relations ci-dessus ne détermine pas le rapport $\frac{b_{N-1}}{a_{N-1}}$. Ainsi, pour organiser la chaîne de $2n$ coniques indépendamment de la condition de fermeture, après s'être donné le triangle autopolaire commun, on prend les deux coniques S'_1 et S_2 simplement conjuguées par rapport à ce triangle, les coniques suivantes, sauf la dernière, dépendent chacune d'un paramètre (faisant simplement partie d'un faisceau tangentiel ou d'un faisceau ponctuel); la dernière conique S_N est alors déterminée et existe réellement. Le système dépend de $2n+1$ paramètres, sans compter les six paramètres du triangle.

Le maintien des φ *critiques le long du cycle aurait suffi à montrer que les* $2n$ *conditions apparentes imposées aux coniques se réduisent à* $2n-1$; *il fallait insister et montrer que ces* $2n-1$ *conditions peuvent être réalisées.*

En ce qui concerne la condition de fermeture du polygone, il faudra que l'angle $\theta_{N,1}$ ait l'une des valeurs, en nombre 2^{N-2}, qui figurent dans les relations

$$\frac{\cos\theta_{1,N}}{\cos\varphi}\cos\alpha_1\cos\alpha_N + \ldots = 1,$$

résultant de l'élimination de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ entre les $N-1$ relations qui lient α_1 et $\alpha_2, \ldots, \alpha_{N-1}$ et α_N. La question de savoir si l'on peut vraiment disposer de a_{N-1} pour que cette condition unique soit réalisée soulève une difficulté que l'on pourrait peut-être tourner en montrant que, pour un choix convenable de la conique S'_{N-1}, l'enveloppe de la droite $A'_{N-1}A_1$ est une conique S_N. Pour organiser la chaîne de $2n$ coniques en tenant compte de la condition de fermeture, après s'être donné le triangle autopolaire commun, on prend les deux coniques S'_1 et S_2 simplement conjuguées par rapport à ce triangle, les coniques suivantes, sauf les deux dernières, dépendent chacune d'un paramètre, et les deux dernières coniques sont alors déterminées; le système dépend de $2n$ paramètres, sans compter les six paramètres du triangle.

4. Si $F(u, v, w)$ est la forme adjointe de la forme quadratique $f(x, y, z)$, on a l'identité

$$F(yz' - zy', zx' - xz', \ldots) = f(x, x)f(x', x') - f^2(x, x'),$$

$f(x, x')$ étant la forme linéaire $a_{11}xx' + \ldots$ déduite de la forme quadratique $f(x, x)$; si le point M est sur la conique $f = 0$, on a pour F un carré parfait :

$$F(yz' - zy', \ldots) = -f^2(x, x').$$

Si S'_1, S_2, S'_3 sont trois coniques inscrites à un même quadrilatère, leurs équations tangentielles sont

$$F_1(u, v, w) = 0, \qquad F_1 - k^2 F_3 = 0, \qquad F_3(u, v, w) = 0;$$

en écrivant que la droite joignant un point de S'_1 à un point de S'_3 est tangente à S_2, on a

$$F_1(y_1 z_3 - z_1 y_3, \ldots) - k^2 F_3(y_1 z_3 - z_1 y_3, \ldots) = 0,$$

ou

$$f_1^2(x_1, x_3) - k^2 f_3^2(x_1, x_3) = 0.$$

ou

$$f_1(x_1, x_3) \pm k f_3(x_1, x_3) = 0.$$

On vérifie ainsi le fait de décomposition signalé au début du n° 3.

Cela permet en outre de substituer aux $2n$ relations doublement quadratiques entre les éléments A'_1, a_2, A'_3, ..., a_{2n}, A'_1, un système de n relations doublement quadratiques entre les seuls éléments A'_1, A'_3, ..., A'_{2n-1}, A'_1.

Dans le cas du triangle, si l'on observe qu'un triangle peut devenir évanouissant soit, d'une part, si les côtés sont trois droites concourantes ou si les sommets sont trois points en ligne droite, soit, d'autre part, si deux sommets sont confondus ainsi que les côtés opposés (triangle bi-évanouissant), on est mis sur la voie du résultat suivant que j'ai pu établir en procédant comme il vient d'être dit et en appliquant la condition de fermeture

$$\frac{\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}\cos\theta_{31}}{\cos\varphi} + \ldots = 1.$$

Soit une chaîne de six coniques

$$S'_1, \quad S_2, \quad S'_3, \quad S_4, \quad S'_5, \quad S_6,$$

conjuguées à un même triangle, telles que chaque conique S (*y compris la dernière*) *touche les tangentes communes aux deux*

coniques voisines S′ *et que chaque conique* S′ (*y compris la première*) *passe par les points communs aux deux coniques voisines* S; *un triangle qui doit avoir ses côtés tangents aux coniques voisines* S, *et ses sommets sur les coniques* S′, *est indéterminé dans deux cas :*

1° *Lorsque les coniques* S *sont inscrites à un même quadrilatère, auquel cas les coniques* S′ *sont circonscrites à un même quadrangle, les coniques* S′ *étant polaires réciproques des coniques* S *par rapport à un système de quatre coniques* Σ;

2° *Lorsque les quatre tangentes communes à* S_2 *et* S_4 *passent respectivement aux quatre points d'intersection de* S'_5 *et* S'_1, *ce qui entraîne des faits analogues pour* S_4, S_6, S'_1, S'_3, *pour* S_6, S_2, S'_3, S'_5.

Dans le premier système, les tangentes en A'_1, A'_3, A'_5 concourent en un point dont le lieu est une conique Σ′ passant par les points communs aux coniques S′, les points de contact des tangentes a_2, a_4, a_6 sont sur une même droite dont l'enveloppe est une conique Σ qui touche les tangentes communes aux coniques S. On peut se donner les coniques S'_1, S'_2, S'_3, Σ′, avec quatre points communs (douze paramètres).

Avec la première solution, on a pour les mêmes coniques quatre espèces de triangles mobiles; avec la deuxième solution, on a seulement deux espèces de triangles. Le système de coniques peut satisfaire à la fois aux conditions 1° et aux conditions 2° (11 paramètres); il admet alors un système de triangles qui fait partie à la fois des deux solutions, trois autres systèmes de triangles qui font partie de la première solution, et un dernier système de triangles qui fait partie de la deuxième solution : ces derniers triangles sont conjugués par rapport à une conique fixe.

5. Pour n quelconque, les coniques S'_1, S'_3, ..., S'_{2n-1} peuvent être en même temps les coniques S_2, S_4. ..., S_{2n}, le côté $A'_1 A'_3$ étant tangent en A'_1 à la conique S'_1, et ainsi de suite. Si l'on considère trois coniques consécutives S'_1, S'_3, S'_5, en un point où S'_3 est coupée par S'_1, la tangente à S'_3 doit être une tangente à S'_5, ou encore une tangente commune à S'_3 et à S'_5 doit avoir un point de contact avec S'_3 situé sur S'_1; la $n^{\text{ième}}$ condition est une conséquence des $n-1$ premières. Il y a une condition de fermeture.

Pour $n=3$, on se donne S'_1 et S'_3; la conique S'_5 doit toucher les tangentes à S'_3 aux points où elle est coupée par S'_1, et passer aux points de contact avec S'_1 des tangentes communes à S'_1 et à S'_3; il existe deux coniques remplissant ces conditions; *il n'y a pas de condition supplémentaire de fermeture.* Pour $n=4$, la fermeture est

impossible dans les conditions où l'on s'est placé (relations doublement quadratiques non décomposables et de genre 1).

Remarque. — La condition indiquée au début pour la décomposition de la relation entre x et z est nécessaire si, dans l'une des deux relations données, les quatre valeurs critiques de l'une des variables sont distinctes (relation de genre 1). Si, dans l'une des deux relations données, deux des valeurs critiques de l'une des variables sont égales, ce qui entraîne l'égalité de deux valeurs critiques de l'autre variable, un fait analogue doit avoir lieu dans l'autre relation, sans que la valeur critique double doive être la même de part et d'autre; les deux autres valeurs critiques de la variable commune, supposées distinctes dans chacune des deux relations, doivent être les mêmes de part et d'autre. L'application au problème des polygones de Poncelet conduirait à considérer le cas où deux coniques consécutives sont tangentes en un point.

Si, dans l'une des relations, les quatre valeurs critiques de l'une des variables étaient égales deux à deux, cette relation se décomposerait en deux relations homographiques; il est bien connu que, pour deux coniques bitangentes S et S', la correspondance entre une tangente à S est un point de S', le point devant être sur la tangente, se décompose en deux correspondances homographiques.

(Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. 18, p. 442.)

M. Montel : *Sur une définition qualitative des cercles osculateurs et des lignes de courbure.*

L'auteur montre par une voie élémentaire que : 1° parmi les familles de cercles tangents à une courbe plane, la famille des cercles osculateurs est caractérisée par la propriété que, pour deux cercles voisins, l'un est à l'intérieur de l'autre; 2° parmi les familles de sphères tangentes à une surface, la famille des sphères osculatrices est caractérisée par la propriété que, pour deux sphères voisines, l'une est à l'intérieur de l'autre.

M. Fouché : *Sur l'homographie.*

SÉANCE DU 23 FÉVRIER 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fouché : *Sur l'homographie.*

SÉANCE DU 15 MARS 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fontené : *Sur le cercle de Joachimsthal.*

1. On peut se demander à quelle condition un cercle coupe une conique en quatre points dont trois soient les pieds de trois normales concourantes; voici la réponse à cette question :

Si d'un point P *on mène à une conique à centre quatre normales* PM_1, PM_2, ..., *le cercle* $M_2M_3M_4$ *passe, non seulement par le point* m_1 *diamétralement opposé au point* M_1, *mais aussi par la projection* μ_1 *du centre de la conique sur la tangente en* m_1.

Réciproquement, *si un cercle passe par un point* m_1 *d'une conique à centre et par la projection* μ_1 *du centre sur sa tangente en* m_1, *il coupe encore la conique en trois points* M_2, M_3, M_4 *tels que les normales en ces points concourent en un point* P.

Si l'on veut obtenir les cercles de Joachimsthal qui ont pour centre un point donné C, on prend sur le prolongement de OC le point r pour lequel on a $Or = 2OC$, on mène du point r les normales rm_1, rm'_1, rm''_1, rm'''_1, et les cercles cherchés, de centre C, passent respectivement aux points m_1, m'_1, ...

2. En 1884, j'ai donné dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* cette extension à l'espace de théorème de Joachimsthal.

Si d'un point P *on mène à une quadrique les six normales dont*

les pieds sont $M_1, M_2, \ldots, M_6$, *les cinq points* $M_2, \ldots, M_6$ *et le point* m_1 *diamétralement opposé au point* M_1 *sont sur une infinité de quadriques ayant leurs axes parallèles à ceux de la quadrique donnée; ces six points sont, par suite, sur trois quadriques de révolution dont les axes sont parallèles à ceux de la quadrique donnée.*

SÉANCE DU 10 MAI 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Fouché : *Sur certains cercles des neuf points.*

SÉANCE DU 24 MAI 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Communications :

M. Fouché : *Sur la transformation de Lie.*

M. Cahen : *Sur un théorème d'arithmétique.*

p étant un nombre premier supérieur à 3, la somme des produits k à k (k impair, supérieur à 1) des nombres 1, 2, ..., $(p-1)$ est divisible par p^2.

SÉANCE DU 28 JUIN 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société, M. Elcus, présenté par MM. Borel et Montel, et M. Soula, présenté par MM. Lattès et Montel.

Communications :

M. Kiveliovitchi : *Sur une méthode de résolution de l'équation* $6x^2+1=y^2$.

Il s'agit de résoudre cette équation en nombres entiers par des méthodes élémentaires sans avoir recours à la théorie de Lagrange.

On voit facilement que x doit être pair. Posons

$$x = 2u, \qquad y = 5u - v;$$

on trouve

$$u^2 - 10uv + v^2 - 1 = 0;$$

en résolvant par rapport à u, on a

$$u = 5v \pm \sqrt{24v^2+1}.$$

On peut prendre le signe + devant le radical (car prendre le signe — revient à changer u en $-u$ et v en $-v$, c'est-à-dire x en $-x$ et y en $-y$). Donc

$$u = 5v + \sqrt{24v^2+1},$$

d'où

$$x = 10v + 2\sqrt{24v^2+1} \qquad y = 24v + 5\sqrt{24v^2+1}.$$

Posons

$$2v = w,$$

on trouve

$$x = 5w + 2\sqrt{6w^2+1}, \qquad y = 12w + 5\sqrt{6w^2+1}.$$

Pour que x et y soient entiers, il faut que w soit solution de l'équation primitive.

Disposons les solutions de cette équation par valeurs croissantes :

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_i, y_i), \quad \ldots.$$

On voit facilement qu'on aura les relations suivantes entre les racines

$$(1) \qquad x_{i+1} = 5x_i + 2y_i, \qquad y_{i+1} = 12x_i + 5y_i.$$

En prenant pour $x_1 y_1$ la solution banale $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, on obtient par ces relations toutes les solutions entières.

La substitution (1) est une substitution automorphe, comme on pouvait le prévoir par la théorie des formes quadratiques. La même méthode est applicable aux équations $ax^2+1=y^2$ lorsque a est de la forme $4h+2$ et tel que $4a+1$ soit un carré parfait (a pourrait être de la forme $4h+1$, mais $16h+5$ n'est jamais un carré parfait).

On peut appliquer la même méthode au cas où $a + 1$ est un carré parfait t^2 en posant $y = tx - v$.

Des méthodes analogues sont applicables à des cas plus généraux.

M. Fouché : *Sur une solution par récurrence du même problème.*

M. Kostitzin : *Sur la résolution de l'équation $ax^2 + 1 = y^2$.*

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, M. Kampé de Fériet, présenté par MM. Chatelet et Denjoy.

Communications :

M. Bioche : *Sur une cubique plane remarquable.*

Édouard Lucas a signalé, en 1876, deux cubiques remarquables dépendant d'un triangle. L'une d'elles est le lieu du point M tel qu'il existe une conique inscrite dans un triangle ABC et dont les normales aux points de contact avec les côtés soient concourantes en M.

Je voudrais rappeler l'attention sur cette cubique, et signaler des propriétés qui semblent n'avoir pas été aperçues par Lucas. La cubique de Lucas peut être obtenue comme le lieu des points M tels que les droites MA, MB, MC soient normales à une conique circonscrite à ABC. Elle admet pour centre le centre du cercle circonscrit à ABC, et pour asymptotes les perpendiculaires menées de ce point aux côtés du triangle. La tangente au centre passe par le point de Lemoine du triangle ABC; ce fait permet de caractériser la cubique en question parmi les cubiques ayant trois asymptotes concourantes et passant par le point de concours. Si l'on se donne trois droites concourantes et un point, il y a une cubique de Lucas admettant ces droites comme asymptotes et passant par ce point.

Étant donné un triangle ABC on peut facilement déterminer 26 points et 10 tangentes, dont les asymptotes et une tangente d'inflexion, soit 37 conditions linéaires.

M. Godeaux : *Sur les transformations birationnelles non périodiques des surfaces algébriques.*

M. Enriques a démontré que si une surface algébrique admet une transformation birationnelle non périodique en elle-même, elle possède un faisceau de courbes elliptiques ou elle est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Dans ce dernier cas, l'auteur démontre que la surface possède une involution cyclique ou qu'elle est l'image d'une involution d'ordre 2 existant sur une surface de genres un.

M. Fouché : *Sur la géométrie élémentaire.*

SÉANCE DU 24 DÉCEMBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Robinson, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Fouché : *Sur la droite de Simson.*

M. L.-B. Robinson : *Sur un système complet de covariants.*

Dans l'*American Journal of Mathematics*, t. XXI, M. Bouton, en se servant de la méthode de Lie, obtient un système complet de covariants [1] de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n réduite à la forme canonique Laguerre-Forsyth.

Mais, en formant les transformations infinitésimales des coefficients, il divise l'équation transformée par le coefficient du premier terme, c'est-à-dire par le coefficient de $Y^{(n)}$ et, par conséquent, il obtient des covariants non analogues à ceux de la forme algébrique. Les

---

[1] Dans cet article, le terme covariant renferme invariant comme cas spécial.

transformations mentionnées ci-dessus sont données par les formules

$$\frac{\partial a_i^{(k)}}{\partial t} = -(i+k)\xi' a_i^{(k)} - \frac{1}{2}\left[k(k+2i-1)a_i^{(k-1)} + i(i-1)a_{i-1}^{(k)}\right]\xi''.$$

L'auteur a obtenu un système complet de covariants sans avoir fait la division mentionnée ci-dessus et par conséquent les transformations infinitésimales sont données par les formules

$$\frac{\partial a_i^{(k)}}{\partial t} = -\xi a_i^{(k)} - \left[(i+k)a_i^{(k)} - \frac{n+1}{2}\,a_i^{(k)}\right]\xi'$$
$$-\frac{1}{2}\left[k(k+2i-1)a_i^{(k-1)} - k(n+1)a_i^{(k-1)} + i(i-1)a_{i-1}^{(k)}\right]\xi''.$$

$a_i^{(k)}$ a le poids $(-n+i+k)$.

$Y^{(k)}$ a le poids k.

On voit immédiatement que les covariants sont définis par le système d'équations

$$\text{(S)}\quad\begin{cases}
X_1 f \equiv \sum_0^{n-1}{}_k\, Y^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} - \sum_0^{w-j}{}_k\sum_3^{n}{}_j\, a_j^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}} - \sum_0^{w}{}_k\, a_0^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = \lambda_1 f,\\[2ex]
X_2 f \equiv \sum_1^{n-1}{}_k\, k\,Y^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} + \sum_0^{w-j}{}_k\sum_3^{n}{}_j\, j(j+k-n)a_j^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}}\\
\qquad\qquad + \sum_0^{w}{}_k\, k(k-n)a_0^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = \lambda_2 f,\\[2ex]
X_3 f \equiv \sum_1^{n-1}{}_k\, k(n-k)Y^{(k-1)}\dfrac{\partial f}{\partial Y^{(k)}}\\
\qquad - \sum_1^{w-j}{}_k\sum_3^{n}{}_j\, k(k+2j-n-2)a_j^{(k-1)}\dfrac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}}\\
\qquad - \sum_1^{w-j}{}_k\sum_4^{n}{}_j\, j(j-1)a_{j-1}^{(k)}\dfrac{\partial f}{\partial a_j^{(k)}}\\
\qquad - \sum_1^{w}{}_k\, k(k-n-2)a_0^{(k-1)}\dfrac{\partial f}{\partial a_0^{(k)}} = 0,
\end{cases}$$

λ_1 et λ_2 sont des nombres constants à déterminer par le poids des covariants cherchés.

On saura résoudre l'équation $X_3 f = 0$ de proche en proche en uti-

lisant le procédé de la séparation des variables. En général, on saura abréger ce procédé en se rappelant le théorème suivant :

En différentiant un covariant absolu on obtiendra un covariant relatif d'ordre un.

Car en nous appuyant sur ce théorème nous verrons qu'il suffit de résoudre

$$X_1 f = X_2 f = 0,$$

$$\sum_{1}^{n-1} k\,k(n-k)\,Y^{(k-1)}\frac{\partial f}{\partial Y^{(k)}} - \sum_{1}^{w-3} k\,k(k-n-4)\,a_3^{\prime(k-1)}\frac{\partial f}{\partial a_3^{\prime(k)}}$$
$$-\sum_{4}^{n} j\,j(j-1)\,a_{j-1}\frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad -\sum_{1}^{w} k\,k(k-n-2)\,a_0^{\prime(k-1)}\frac{\partial f}{\partial a_0^{\prime(k)}} = 0$$

Lorsqu'on a obtenu toutes les solutions de $X_3 f = 0$, les solutions du système (S) s'obtiendront en tenant compte des considérations suivantes :

1° Toute fonction qui a le poids λ_2 satisfait à l'équation $X_2 f = \lambda_2 f$.

2° Toute fonction de degré r par rapport aux $a_j^{(k)}$ et de degré $\lambda_1 + r$ par rapport aux $Y^{(k)}$, où r est parfaitement arbitraire, satisfait à l'équation $X_1 f = \lambda_1 f$.

Si nous voulons calculer les invariants absolus, il nous faut intégrer le système

$$X_1 f = X_2 f = X_3 f = 0.$$

Il est évident que les covariants identiques s'identifient avec ceux de Bouton.

Les covariants mêlés peuvent s'écrire

$$C_1 = Y^{8-2n} a_3^{2} \{(n-2)Y'^2 - (n-1)YY''\}^{n-3},$$
$$C_2 \equiv Y^{4-n} a_3^{4-n} \{[6-(n+1)]a_3 Y' + (n-1)a'_3 Y\}^{n-3}.$$
$$C_3 \equiv Y^2 a_3^{8-2n} \{[14+(n+1)]a_3'^2 - 2[6-(n+1)]a_3 a_3''\}^{n-3}.$$

Il faut ajouter que le nouveau système de covariants ne peut pas s'identifier avec le système calculé par Bouton, même si l'on écrit $p_0 = 1$.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. Fouret, G. Humbert; Ch. Bioche, rapporteur.)

Le trésorier de la Société, M. Servant, a été mobilisé. La difficulté d'établir des comptes précis par suite du départ précipité de notre trésorier sur le front et diverses autres circonstances ont empêché la présentation d'un rapport à la date indiquée par les statuts. Celui-ci établit la situation au 31 mars 1917.

M. Cahen, archiviste de la Société, a bien voulu accepter de suppléer notre trésorier absent, avec l'aide de notre agent, M. Vézinaud. Il y a lieu de remercier tout particulièrement M. Cahen et M. Vézinaud dont la tâche est singulièrement compliquée, et qui assurent le fonctionnement de la Société au point de vue financier.

Les cotisations rentrent difficilement pour diverses raisons, difficultés des communications, mobilisation d'un certain nombre de nos collègues, etc. Quelques-uns des membres de la Société se refusent catégoriquement à payer leurs cotisations pendant la guerre. Néanmoins, grâce à ses réserves, la Société peut faire face à ses dépenses et assurer la publication de son *Bulletin*.

Ce Rapport, n'ayant pu être présenté à l'Assemblée générale, ne peut être considéré que comme provisoire. Il y a lieu d'espérer qu'à la prochaine Assemblée générale, la situation financière pour l'exercice courant pourra être établie conformément aux statuts.

Ch. Bioche.

État des recettes et des dépenses courantes.

	fr
Solde actif au 31 octobre 1913	2009,42

Recettes.

Cotisations	6940,40
Abonnements, vente de volumes	2363,30
Subvention du Ministère	1400,00
Intérêts de bons de la défense nationale	60,00
Total de l'actif	12773,12

Dépenses.

Bulletin (T. XLII)	fr 4620,83
Tirages à part	250,20
Bulletin (T. XLIII)	4088,40
Tirages à part	381,25
Traitement de l'agent, gratifications	1487,00
Poste et divers	815,75
Souscriptions à des Sociétés (Amis des Sciences, employés de la Sorbonne)	105,00
Souscription aux œuvres d'Euler	26,00
Traduction	300,00
Total des dépenses	12074,43
Excédent des recettes	698,69
Total comme ci-dessus	12773,12

En portefeuille :

1° Réserve inaliénable (titres nominatifs) :

886fr de rente 3 pour 100;
3 obligations Ouest 3 pour 100;
2 obligations des Chemins de fer du Sud;

2° Réserve disponible (titres au porteur) :

348fr de rente 3 pour 100;
565fr de rente 5 pour 100 1915;
60fr de rente 5 pour 100 1916.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58384 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58384 55, quai des Grands-Augustins.